Skript zur Vorlesung

# Elementarmathematik II

Sommersemester 2016

Prof. Dr. Annette Werner

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Reelle Zahlen

Wir erinnern an die Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in der Elementarmathematik I.

Wir haben in der Elementarmathematik I bereits Folgen und Grenzwerte in den rationalen Zahlen betrachtet.

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine relle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, so nennen wir die Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

**Definition 1.1** *i) Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, das von $n$ abhängt, mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N$.*

*ii) Ist $a$ Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreiben wir*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

*und sagen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$.*

*iii) Ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_k \in \mathbb{R}$ gegeben, so sagen wir, die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen $b$ und schreiben kurz $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = b$, falls die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

*gegen $b$ konvergiert.*

Es gelten dieselben Rechenregeln für Grenzwerte wie in [We], Lemma 6.2.

Außerdem gilt: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \leqq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leqq c$ (Übungsaufgabe).

Wie in [We], Satz 6.7 zeigt man, dass für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Daraus haben wir in der Elementarmathematik I die Darstellung rationaler Zahlen als periodische Dezimalbrüche abgeleitet (siehe [We], Definition 6.9).

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ haben wir eingeführt als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Lesen Sie das noch einmal nach in [We], Kapitel 7 und übertragen Sie den Begriff der Cauchyfolge auf Folgen reeller Zahlen.

Die Menge $\mathbb{R}$ kann mit einer natürlichen Addition und Multiplikation ausgestattet werden, die sie zu einem Körper macht. Dieser ist vollständig (das heißt, dass jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt), und lässt sich durch eine natürliche Kleiner-Relation $<$ anordnen.

**Definition 1.2** *Für reelle Zahlen $a \leqq b$ definieren wir verschiedene Typen von Intervallen zwischen $a$ und $b$:*

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x \leqq b\} \\ [a,b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqq x < b\} \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqq b\} \\ ]a,b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}. \end{aligned}$$

**Definition 1.3** *Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen, so dass*

*i)* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und so dass*

*ii) die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0$ konvergiert.*

**Satz 1.4** *Zu jeder Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: $\{x\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.*

**Beweis :** Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der linken Randpunkte der Intervallschachtelung. Es sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N$. Insbesondere gilt $b_N - a_N = |b_N - a_N| < \varepsilon$. Für alle $n \geqq m \geqq N$ ist wegen Definition 1.3 i)

$$a_N \leqq a_m \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_m \leqq b_N,$$

also folgt

$$|a_m - a_n| \leqq |b_N - a_N| < \varepsilon.$$

Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und hat somit einen Grenzwert $x$.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist für alle $n \geqq m$

$$a_n \leqq b_n \leqq b_m,$$

also folgt $x = \lim_{n\to\infty} a_n \leqq b_m$.

Somit ist $x$ in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten. Angenommen, $y$ ist ein beliebiger Punkt, der in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ enthalten ist. Dann gilt sowohl $a_n \leqq x \leqq b_n$ als auch $a_n \leqq y \leqq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|y - x| \leqq |b_n - a_n| = b_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0$ konvergiert, folgt $x = y$. $\square$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so nennen wir für jede unendliche Teilmenge $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge.

**Beispiel:** Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert (Übungsaufgabe).

**Definition 1.5** *i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leqq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man „nach unten beschränkt“ durch $a_n \geqq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*ii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.*

*iii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (streng) monoton wachsend, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{n+1} \geqq a_n \quad \text{(im strengen Fall } a_{n+1} > a_n\text{)}$$

*gilt. Analog definiert man (streng) monoton fallend durch $a_{n+1} \leqq a_n$ (im strengen Fall $a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Ein sehr wichtiger Satz über die reellen Zahlen ist der Satz von Bolzano-Weierstraß.

**Satz 1.6** ***(Bolzano-Weierstraß)*** *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis :** Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann gibt es nach Definition 1.5 reelle Zahlen $a$ und $b$ mit $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren nun mit vollständiger Induktion eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, so dass jedes Intervall $[a_n, b_n]_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Für den Anfang setzen wir

$a_1 = a$ und $b_1 = b$. Ist für $n \in \mathbb{N}$ ein Intervall $[a_n, b_n]$ konstruiert, das eine Teilfolge enthält, so halbieren wir es und erhalten zwei Intervalle

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right] \text{ und } \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right].$$

Da $[a_n, b_n]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, muss mindestens eines dieser beiden Teilintervalle ebenfalls unendlich viele Folgenglieder enthalten. Ein solches Teilintervall wählen wir aus und machen es zu $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Das definiert eine Intervallschachtelung im Sinne von Definition 1.3 (Übungsaufgabe). Nach Satz 1.4 gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Nun definieren wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Ausgangsfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

Wir starten mit einem beliebigen Folgenglied $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Ist das Folgenglied $x_{n_k}$ konstruiert, so wählen wir aus den unendlich vielen Folgengliedern in $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ ein $x_{n_{k+1}}$ aus, dessen Index $n_{k+1}$ größer als $n_k$ ist. Das liefert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x$ konvergiert. □

Ein wichtiges Kriterium für die Existenz von Grenzwerten liefert der folgende Satz.

**Satz 1.7** *Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge reeller Zahlen konvergiert gegen einen Grenzwert.*

*Analog konvergiert auch jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge.*

**Beweis :** Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend, so ist diese Folge durch $a_1$ nach unten beschränkt und damit beschränkt im Sinne von Definition 1.5.

Wir können also den Satz von Bolzano-Weierstraß Satz 1.6 anwenden, der uns eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ liefert. Es sei $a$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir zeigen nun, dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$ konvergiert.

Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geqq K$ gilt

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, also ist $a_{n_k} \leqq a$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $a_n$ ein beliebiges Folgenglied, so gibt es ein $k$ mit $n_k \geqq n$. Also ist $a_n \leqq a_{n_k} \leqq a$.

Wir setzen $N = n_K$. Für jedes $n \geqq N$ gilt also $a_N = a_{n_K} \leqq a_n \leqq a$ und $|a_{n_K} - a| < \varepsilon$. Daraus folgt $|a_n - a| = a - a_n \leqq a - a_{n_K} = |a - a_{n_K}| < \varepsilon$. □

**Definition 1.8** *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leqq c$ für alle $x \in M$, so heißt $c$ obere Schranke von $M$. Analog heißt $c \in \mathbb{R}$ untere Schranke von $M$, falls $x \geqq c$ für alle $x \in M$ gilt.*

**Beispiel:** Jedes $c \leqq 0$ ist eine untere Schranke des Intervalls $[0, 1]$ und des Intervalls $]0, 1]$.

Wir formulieren jetzt das Supremumsprinzip:

**Satz 1.9** *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge.*

*i) Hat $M$ eine obere Schranke, so existiert eine kleinste obere Schranke* $\sup M$ *(Supremum von $M$).*

*ii) Hat $M$ eine untere Schranke, so existiert eine größte untere Schranke* $\inf M$ *(Infinium von $M$).*

**Beweis :**

i) Ist $c$ eine obere Schranke von $M$, so konstruieren wir induktiv eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oberen Schranken von $M$ und eine Folge von Elementen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $M$. Wir setzen $c_1 = c$ und wählen $x_1 \in M$ beliebig. Sind $c_n$ und $x_n$ konstruiert, so betrachten wir den Mittelwert $\frac{x_n+c_n}{2}$. Ist dieser eine obere Schranke von $M$, so setzen wir $c_{n+1} = \frac{x_n+c_n}{2}$ und $x_{n+1} = x_n$.

   Falls nicht, so wählen wir ein $x_{n+1} \in M$ mit $x_{n+1} > \frac{x_n+c_n}{2}$ und setzen $c_{n+1} = c_n$. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $M$ und eine monoton fallende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oberen Schranken mit $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - x_n) = 0$. (Machen Sie sich diese Eigenschaften klar!) Nach dem Monotonieprinzip Satz 1.7 konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Aus $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - x_n) = 0$ folgt $c = x$.

   Dann ist $c$ eine obere Schranke von $M$ (wieso?) und für jede obere Schranke $d$ von $M$ folgt aus $x_n \leqq d$, dass $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqq d$ ist.

   Daher ist $c$ die kleinste obere Schranke.

ii) geht analog (Übungsaufgabe).

□

Wir wollen uns nun noch mit einer Frage beschäftigen, die bis zu den Durchbrüchen von Cantor um 1900 zu heftigen Debatten geführt hat: Können unendliche Mengen verschieden groß sein?

**Definition 1.10** *i) Eine Menge $M$ heißt endlich, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung*

$$f : \{1, \ldots, n\} \to M$$

*gibt. Anschaulich gesprochen, können wir die Elemente von $M$ durch $1, 2, 3, \ldots, n$ abzählen.*

*ii) Eine Menge $M$ heißt unendlich, falls sie nicht endlich ist.*

*iii) Eine Menge $M$ heißt abzählbar unendlich, falls es eine bijektive Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \to M$$

*der natürlichen Zahlen auf $M$ gibt.*

**Beispiel:** Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

Verblüffenderweise gilt das für die reellen Zahlen nicht mehr, $\mathbb{R}$ ist also „überabzählbar unendlich“. Dafür brauchen wir die Darstellung der reellen Zahlen als Dezimalzahlen.

Eine Dezimalzahl besteht aus einem Vorzeichen $+$ oder $-$ (wobei $+$ nicht geschrieben wird), einer nicht-negativen ganzen Zahl $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_0 \geq 0$ (das ist der Teil vor dem Komma) und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Ziffer $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ (mit einer Bedingung, die wir gleich besprechen). Sei zunächst das Vorzeichen $+$. Dann ist der zugehörige (unendliche) Dezimalbruch $x$ mit Nachkommastellen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ definiert als

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots.$$

Definitionsgemäß ist $x$ also der Grenzwert der Folge rationaler Zahlen

$$(a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 10 + a_n}{10^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dieser Grenzwert existiert etwa nach Satz 1.4 (man könnte auch zeigen, dass diese Folge eine Cauchyfolge rationaler Zahlen ist. Führen Sie ein Argument aus).

An die Nachkommastellen einer Dezimalzahl stellt man im Allgemeinen die Bedingung, dass die Dezimalzahl nicht auf Periode $9$ enden soll. Dies liegt an der Rechnung

$$0,999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1,000\ldots,$$

oder allgemeiner für Periode $9$ ab der $(n+1)$-ten Stelle ($a_n \leq 8$):

$$\begin{aligned} a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n999\ldots &= a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n + 10^{-n} \cdot 0,999\ldots \\ &= a_0, a_1a_2a_3\ldots a_n + 10^{-n} = a_0, a_1a_2a_3\ldots(a_n+1). \end{aligned}$$

Für das Vorzeichen $-$, also negative reelle Zahlen, ist die Bedeutung einer Dezimalzahl mit Nachkommastellen $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ für $n \geq 1$ und $a_0 \geq 0$ aus $\mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} x &= -a_0, a_1a_2a_3\ldots = -(a_0, a_1a_2a_3\ldots) = -\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}\Big) \\ &= -(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots). \end{aligned}$$

Insbesondere ist durch $x = -(-x)$ die Beschreibung, welche reelle Zahl durch den Dezimalbruch beschrieben wird, erfolgreich auf den Fall des Vorzeichens $+$ zurückgeführt.

Wir geben noch ein Beispiel, das illustriert, warum man für negative Dezimalzahlen $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ mit $a_0 < 0$ nicht die gleiche Interpretation $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ wie für positive Dezimalzahlen hat. Jeder weiß nämlich, daß

$$-1,7 \neq -1 + \frac{7}{10} = -0,3$$

ist.

Wir haben in [We], Definition 6.9 schon gesehen, dass periodische Dezimalbrüche rationale Zahlen ergeben.

**Lemma 1.11** *Für jede reelle Zahl $x$ gibt es ein $a_0 \in \mathbb{Z}$ sowie Ziffern $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$$

*gilt. Jede reelle Zahl ist also ein unendlicher Dezimalbruch.*

*Wir dürfen sogar fordern, dass es kein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \geqq k_0$ die Ziffer $a_k = 9$ ist (dass also der Dezimalbruch nicht die Periode $9$ endet). In diesem Fall sind alle $a_n (n \in \mathbb{N}_0)$ eindeutig bestimmt.*

**Beweis :** Der Fall $x < 0$ wird durch Übergang zu $-x$ auf den Fall $x \geq 0$ zurückgeführt. Wir nehmen daher nun an, daß $x \geq 0$ gilt.

Es gibt genau ein $a_0 \in \mathbb{Z}$ mit

$$x \in [a_0, a_0 + 1).$$

Nach Annahme ist $x \geq 0$, und daher $a_0 \geq 0$ eine nicht-negative ganze Zahl wie für eine Dezimalzahl mit Vorzeichen $+$ gefordert.

Wir teilen das Intervall $[a_0, a_{0+1})$ in zehn Intervalle auf:

$$\Big[a_0, a_0 + 1\Big) = \Big[a_0, a_0 + \frac{1}{10}\Big) \cup \Big[a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}\Big) \cup \cdots \cup \Big[a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1\Big)$$

Dann liegt $x$ in genau einem dieser Intervalle. Es gilt also genau ein $a_1 \in \{0, \ldots 9\}$ mit $x \in [a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1+1}{10})$. Dieses Intervall teilen wir wieder in zehn disjunkte Intervalle auf und finden genau ein $a_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ mit

$$x \in \Big[a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100}\Big).$$

So fahren wir induktiv fort und konstruieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen in $\{0, 1, \ldots, 9\}$ mit

$$x \in \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}, \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + 10^{-n}\Big).$$

Daraus folgt sofort $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = x$, also $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Die so konstruierte Folge endet nicht auf der Periode $9$ (Übungsaufgabe).

Ist $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a'_k 10^{-k}$ eine weitere Darstellung von $x$ als Dezimalbruch, der nicht auf der Periode $9$ endet, so liegt

$$x \in \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{a'_k}{10^k}, \sum_{k=0}^{n} \frac{a'_k}{10^k} + 10^{-n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit Induktion nach $n$ folgt $a_n = a_{n'}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Jetzt können wir mit dem sogenannten Cantor'schen Diagonalargument folgenden wichtigen Satz zeigen.

**Satz 1.12** *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

**Beweis :** Angenommen, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann ist auch das Intervall $[0,1]$ abzählbar. Wir schreiben die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ aus $[0,1]$ als Dezimalbrüche, die nicht auf der Periode $9$ enden, untereinander auf:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots a_n^{(1)} \ldots \\ x_2 & = & 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots a_n^{(2)} \ldots \\ x_3 & = & 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ldots a_n^{(3)} \ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Nun wählen wir für jedes $n \geqq 1$ eine Ziffer $b_n \in \{0, \ldots, 9\}$ mit der Eigenschaft

$$b_n \neq a_n^{(n)},$$

so dass die Folge der $b_n$ nicht ab irgendeinem Folgenglied konstant $= 9$ wird. Die reelle Zahl

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} b_k$$

liegt zwischen $0$ und $1$, aber sie kann in unserer Liste nicht vorkommen ! $\square$

# 2 Stetigkeit

Wir betrachten nun Abbildungen von Teilmengen der reellen Zahlen nach $\mathbb{R}$. Ist $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}$$

eine Abbildung, so nennen wir im folgenden $f$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D$. Die Menge Bild $(f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}$ heißt Bild von $f$. Es ist nicht nur die Funktionsvorschrift, sondern auch der Definitionsbereich wichtig zur Untersuchung von Funktionen. So ist etwa die Funktion

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{array}$$

nicht injektiv, die Funktion

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{array}$$

hingegen schon.

Hier schreiben wir $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ und analog definieren wir $\mathbb{R}_{\geqq 0}, \mathbb{R}_{<0}$ und $\mathbb{R}_{\leqq 0}$.

**Beispiele:**

i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

heißt Identität auf $\mathbb{R}$.

ii) Ist $c \in \mathbb{R}$, so heißt die Funktion

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto c \end{aligned}$$

konstante Funktion.

iii) Für jedes Polynom $p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a$ mit $a_n, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine Funktion durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} p: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

iv) Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geqq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

heißt auch Heavyside-Funktion.

Wir können Funktionen addieren und multiplizieren, falls sie denselben Definitionsbereich haben.

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit Definitionsbereich $D$, so ist

$$f + g : D \to \mathbb{R} \text{ definiert als } x \mapsto f(x) + g(x)$$

und

$$fg : D \to \mathbb{R} \text{ definiert als } x \mapsto f(x)g(x).$$

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit Bild $(f) \subset D'$, so ist die Verknüpfung

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

definiert als $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Wir wollen jetzt den Begriff der Stetigkeit einführen, der ausdrückt, dass eine Funktion keine Sprungstellen hat.

**Definition 2.1** *i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in einem Punkt $x \in D$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:*

*Ist $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$, so folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

*ii) $f$ heißt stetig (oder stetig auf $D$), falls sie in jedem $x \in D$ stetig ist.*

**Beispiel:** Die Identität, alle konstanten Funktionen und alle Polynomfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$. Die Heavyside-Funktion ist nicht stetig in $x = 0$.

Oft ist es leichter, die Stetigkeit von Funktionen mit Folgen zu testen.

**Satz 2.2** *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $x$ und $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge der Funktionswerte $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

**Beweis :** Angenommen, $f$ ist stetig in $x$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $D$ mit Grenzwert $x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in D$ gilt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqq N$ gilt $|x_n - x| < \delta$. Daraus folgt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$. Also konvergiert $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.

Umgekehrt nehmen wir an, das Folgenkriterium ist erfüllt. Angenommen, $f$ ist nicht stetig in $x$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $y \in D$ existiert mit $|y - x| < \delta$, aber $|f(y) - f(x)| \geqq \varepsilon$. Für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ finden wir also ein $y_n$ mit $|y_n - x| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x)| \geqq \varepsilon$. Dann konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x$, aber $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$ (Übungsaufgabe), im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Also ist $f$ stetig in $x$. □

**Lemma 2.3** *Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann auch $f + g$ und $f \cdot g$.*

*Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

*stetig. Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ stetig mit Bild $(f) \subset D'$, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

**Beweis :** Übungen. □

Jetzt wollen wir einen Satz beweisen, der mit der Anschauung übereinstimmt, dass man Graphen stetiger Funktionen ohne Absetzen zeichnen kann.

**Satz 2.4** *(Zwischenwertsatz) Es sei $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes $y$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = y$.*

**Beweis :** Wir betrachten zunächst den Fall $f(a) \leqq f(b)$. Dann ist $f(a) \leqq y \leqq f(b)$. Wir konstruieren wie folgt eine Intervallschachtelung. Wir setzen $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Angenommen, das Intervall $[a_n, b_n]$ ist konstruiert. Dann betrachten wir den Mittelpunkt $m = \frac{a_n+b_n}{2}$. Wir definieren das nächste Intervall als

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m] & \text{, falls } f(m) > y \text{ ist} \\ [m, b_n] & \text{, falls } f(m) \leqq y \text{ ist.} \end{cases}$$

Dann gilt $f(a_n) \leqq y \leqq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe). Das liefert eine Intervallschachtelung (Übungsaufgabe). Nach Satz 2.4 gibt es genau einen Punkt $x$, der in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ und der Stetigkeit von $f$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$. Analog gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$. Aus $f(a_n) \leqq y \leqq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt somit durch Grenzübergang $f(x) \leqq y \leqq f(x)$, also $y = f(x)$. Der Fall $f(a) > f(b)$ folgt durch Betrachtung der Funktion $-f$. □

Mit dem Zwischenwertsatz lassen sich etwa Wurzeln definieren:

**Beispiel** (Wurzelfunktionen): Es sei $c > 0$ und $m \geqq 2$ in $\mathbb{N}$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} F: \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow x^m - c. \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $x^m = \underbrace{x \ldots x}_{m-\text{ mal}}$.)

**1. Fall:** $0 < c \leqq 1$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz Satz 2.4 ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 0$, denn $f(0) = -c < 0 < 1 - c = f(1)$.

**2. Fall:** $c > 1$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz Satz 2.4 ein $x_0 \in [0, c]$ mit $f(x_0) = 0$, denn $f(0) = -c < 0 < c^m - c = f(c)$.

Der Zwischenwertsatz liefert also in beiden Fällen ein $x_0 > 0$ mit $x_0^m = c$. Es gibt nur ein positives $x_0$ mit $x_0^m = c$, denn aus $0 < x_0 < x_0'$ folgt $x_0^m < (x_0')^m$.

**Definition 2.5** *Wir bezeichnen diese eindeutig bestimmte positive Lösung $x_0$ der Gleichung $x^m = c$ als $x_0 = \sqrt[m]{c}$.*

Es gilt $\sqrt[m]{c_1 c_2} = \sqrt[m]{c_1}\,\sqrt[m]{c_2}$ (Übungsaufgabe).

**Definition 2.6** *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Dann gibt es für jedes $y \in Bild(f)$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$. Die Funktion*

$$f^{-1} : \mathit{Bild}(f) \to D,$$

*die jedem $y \in$ Bild$(f)$ dieses eindeutig bestimmte $x \in D$ mit $f(x) = y$ zuordnet, heißt Umkehrfunktion von $f$.*

**Beispiel:** Für jedes $m \geqq 2$ ist

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \mapsto & x^m \end{array}$$

injektiv, wie wir oben gesehen haben. Die Funktion $\sqrt[m]{\ } : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist die Umkehrfunktion von $f$.

**Definition 2.7** *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2) \ \big(\text{ im strengen Fall } f(x_1) < f(x_2)\big).$$

*Analog heißt $f$ (streng) monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)\big(\text{im strengen Fall } f(x_1) \geqq f(x_2)\big).$$

**Beispiel:** Für $m \geqq 2$ ist die Potenzfunktion auf $D = \mathbb{R}_{\geqq 0}$, also

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\geqq 0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^m \end{array}$$

streng monoton wachsend, die Potenzfunktion $x \mapsto x^{-m}$ auf $D = \mathbb{R}_{>0}$ hingegen streng monoton fallend.

Offenbar sind streng monoton wachsende und streng monoton fallende Funktionen injektiv, sie besitzen also eine Umkehrfunktion.

**Proposition 2.8** *Sei $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ eine stetig und streng monoton wachsende (oder fallende) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : \mathit{Bild}(f) \to \mathbb{R}$$

*ebenfalls stetig, und streng monoton wachsend (oder fallend).*

**Beweis :** Wir betrachten nun den Fall, dass $f$ streng monoton wachsend ist. Der andere Fall lässt sich analog behandeln.

Ist $f(x_1) > f(x_2)$, so kann weder $x_1 = x_2$ noch (wegen der strengen Monotonie) $x_1 < x_2$ gelten. Also folgt $x_1 > x_2$. Somit ist $f^{-1}$ ebenfalls streng monoton wachsend.

Wir fixieren nun ein $x \in ]a, b[$ und zeigen die Stetigkeit von $f^{-1}$ im Punkt $y = f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ und ohne Einschränkung so klein, dass $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset ]a, b[$. Da $f$ streng monoton wachsend ist, gilt $f(x - \varepsilon) < y < f(x + \varepsilon)$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $]y-\delta, y+\delta[ \subset ]f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)[$ ist. Für jedes $y' \in$ Bild$(f)$ mit $|y-y'| < \delta$ gibt es genau ein $x' \in ]a, b[$ mit $f(x') = y'$. Nach Konstruktion von $\delta$ ist $y' \in ]f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon)[$, also gilt

$$f(x - \varepsilon) < f(x') < f(x + \varepsilon).$$

Da $f^{-1}$ streng monoton wachsend ist, folgt hieraus

$$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon,$$

also $|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| = |x' - x| < \varepsilon$. □

**Beispiel:** Da für jedes $m \geqq 2$ die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \mapsto & x^m \end{array}$$

streng monoton wachsend mit Bild $\mathbb{R}_{>0}$ ist, ist auch die Umkehrfunktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \mapsto & \sqrt[m]{x} \end{array}$$

stetig und streng monoton wachsend. Jetzt wollen wir noch einen wichtigen Satz über stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen zeigen.

**Satz 2.9** *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall.*

*Dann ist Bild$(f)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, das heißt, Bild$(f)$ hat eine obere und eine untere Schranke.*

*Außerdem nimmt die Funktion $f$ ihr Maximum und ihr Minimum auf $D$ an, das heißt, es gibt $x_{\max} \in D$ und $x_{\min} \in D$ mit*

$$\begin{array}{rcl} f(x_{\max}) & = & \sup\{f(x) : x \in D\} \\ f(x_{\min}) & = & \inf\{f(x) : x \in D\}. \end{array}$$

**Beweis :** Falls Bild$(f)$ nicht beschränkt ist, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Die Folge $x_n$ ist beschränkt, da sie im Intervall $[a, b]$ liegt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie also eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Aus $a \leqq x_{n_k} \leqq b$ für alle $k$ folgt für $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$ die Abschätzung $a \leqq x \leqq b$. Also ist $x \in [a, b]$. Da $f$ stetig ist, folgt nach Satz 2.2 $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Daher ist $\big(f(x_{n_k})\big)_k$ eine beschränkte Folge, im Widerspruch zur Konstruktion von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Also muss Bild$(f)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein.

Es sei $s = \sup \text{Bild}(f)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in$ Bild $(f)$ mit $s - \frac{1}{n} \leqq y_n \leqq s$, denn $s - \frac{1}{n}$ kann keine obere Schranke von Bild $(f)$ sein. Es ist $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = s$. Zu $y_n \in$ Bild$(f)$ existiert ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$. Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt, hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geqq 1}$. Sei $x_{\max} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$. Da $f$ stetig ist, folgt nach Satz 2.2

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}).$$

Nun sei $y_{n_k} = f(x_{n_k})$. Die Teilfolge $(y_{n_k})_{k \geqq 1}$ der konvergenten Folge $(y_n)_{n \geqq 1}$ hat ebenfalls den Grenzwert $s$. Daher folgt

$$f(x)_{\max} = s,$$

also ist $x_{\max}$ tatsächlich der gesuchte Wert. Analog konstruiert man $x_{\min}$ mit Hilfe von inf Bild$(f)$ (Übungsaufgabe). $\square$

Die Bedingung, dass der Definitionsbereich von $f$ in Satz 2.9 ein abgeschlossenes Intervall ist, ist wesentlich. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : ]0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

ist etwa stetig auf dem halboffenen Intervall, Bild$(f)$ ist aber nicht nach oben beschränkt.

An welcher Stelle geht der Beweis von Satz 2.9 schief, wenn man nicht annimmt, dass $f$ auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist?

Mit Hilfe der Funktion

$$\sqrt[m]{\phantom{x}} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0},$$

die wir oben definiert haben, können wir nun Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten definieren.

**Definition 2.10** *i) Ist $m \in \mathbb{Z}$, so definieren wir für jedes $a \in \mathbb{R}$*

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m-mal} & m > 0 \\ 1 & m = 0 \\ \underbrace{\left(\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}\right)}_{(-m)-mal} & m < 0 \end{cases}$$

*ii) Ist $q = \frac{m}{n}$ eine rationale Zahl mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, so setzen wir für jedes $a > 0$*

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}.$$

Das ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl von $m$ und $n$ — wir können Brüche ja erweitern und kürzen, ohne ihren Wert zu ändern. Gilt $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, so folgt $mn' = mn$. Also ist

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn'} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m'n} \\ &= \left(\sqrt[n]{a^{m'}}\right)^{n} = a^{m'} = \left(\sqrt[n']{a^{m'}}\right)^{n'}. \end{aligned}$$

Da es genau eine positive reelle Zahl gibt, deren $n'-$Potenz $a^{m'}$ ist, folgt

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}.$$

**Lemma 2.11** *Es gelten die Potenzgesetze: Für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt*

*i) $a^{p+q} = a^p a^q$, insbesondere ist also $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.*

*ii) $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$*

*iii) $a^p b^p = (ab)^p$.*

**Beweis :** Für $p, q \in \mathbb{Z}$ folgen diese drei Gesetze aus Definition 2.10 i) (Übungsaufgabe).

iii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, denn beide Seiten ergeben $ab$ in der $n-$ten Potenz. Daraus folgt die Behauptung.

i) und ii) Übungsaufgabe. □

**Lemma 2.12** *Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gilt*

$$\begin{cases} a^p > a^q & , \text{ falls } 0 < a < 1 \\ a^p < a^q & , \text{ falls } a > 1 \end{cases}$$

*ist.*

**Beweis :** Wir betrachten zunächst den Fall $a > 1$. Wir schreiben $q - p = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $q - p > 0$ ist, gilt sogar $m \in \mathbb{N}$.

Da $a > 1$ ist, ist auch $a^m > 1$ und somit $\sqrt[n]{a^m} > 1$ (wieso?). Also folgt

$$1 < \sqrt[n]{a^m} = a^{q-p}$$

Nach Multiplikation mit $a^p > 0$ folgt $a^p < a^q$. Falls $a < 1$ ist, wenden wir den schon gezeigten Teil der Behauptung auf $a^{-1} > 1$ an. □

Jetzt wollen wir Potenzen mit reellen Exponenten definieren. Dazu brauchen wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.13** *Ist $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = 0$, so folgt für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$*

$$\lim_{k\to\infty} a^{q_k} = 1.$$

**Beweis :** Wir betrachten zunächst den Fall $a \geqq 1$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geqq k_0$ gilt

$$|q_k| < \frac{1}{n}.$$

Da $\sqrt[n]{a} \geqq 1$ ist, schreiben wir $\sqrt[n]{a} = 1 + h$ mit $h \geqq 0$ und erhalten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$a = \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1+h)^n > 1 + nh.$$

Also folgt $h < \frac{a-1}{n} < \varepsilon$ und somit

$$|a^{q_k} - 1| < |\sqrt[n]{a} - 1| = |h| < \varepsilon$$

für alle $k \geqq k_0$ mit $q_k \geq 0$, denn nach Lemma 2.12 ist dann $1 \leq a^{q_k} \leq \sqrt[n]{a}$. Ist $k \geqq k_0$ mit $q_k < 0$, so folgt aus Lemma 2.12 $1 \geqq (a^{-1})^{-q_k} > (a^{-1})^{\frac{1}{n}}$, also $|1 - a^{q_k}| \leq |1 - a^{-\frac{1}{n}}|$. Wegen $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{1+h} = 1 - \frac{h}{1+h}$ folgt auch hier $|1 - a^{-\frac{1}{n}}| = \frac{h}{1+h} < \varepsilon$. Der Fall $0 < a < 1$ folgt durch Anwendung des bereits Gezeigten auf $a^{-1}$. □

**Satz 2.14** *Ist $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in \mathbb{Q}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ die Folge der rationalen Potenzen $(a^{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert. Diesen nennen wir $a^x$.*

**Beweis :** Ist $a > 1$, so sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ (Wieso existiert eine solche Folge?). Nach Lemma 2.12 ist dann auch die Folge $(a^{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Da die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$ besitzt, ist nach Lemma 2.12 auch $(a^{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also ist die Folge $(a^{x_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Satz 1.7 konvergent. Wir nennen ihren Grenzwert $a^x$. Ist nun $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{k\to\infty} x'_k = x$, so ist $(x_k - x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $0$ konvergiert. Aus Lemma 2.13 folgt daher $\lim\limits_{k\to\infty}(a^{x_k - x'_k}) = 1$.

Daher ist auch die Folge $a^{x'_k} = a^{x_k} a^{(x'_k - x_k)}$ konvergent mit Grenzwert $a^x$.

Der Fall $0 < a < 1$ folgt wieder durch Betrachten von $a^{-1}$. □

**Satz 2.15** *Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$. Dann ist die Potenzfunktion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

$$\textit{stetig und } \begin{cases} \textit{streng monoton wachsend, falls } a > 1 \\ \textit{streng monoton fallend, falls } 0 < a < 1. \end{cases}$$

*Ihr Bild ist $\mathbb{R}_{>0}$.*

**Beweis :** Wir zeigen zunächst die Monotonie im Fall $a > 1$. Dazu seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gegeben. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$ (Begründung?). Sei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $x < q - \frac{1}{k}$ und $q + \frac{1}{k} < y$ gilt.

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $x_n < q - \frac{1}{k}$, analog sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ und $y_n > q + \frac{1}{k}$. Dann folgt mit Lemma 2.12 aus $x_n < q - \frac{1}{k} < q + \frac{1}{k} < y_n$ auch

$$a^{x_n} < a^{q-\frac{1}{k}} < a^{q+\frac{1}{k}} < a^{y_n}$$

$$\begin{aligned} \text{und daher} \quad a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} &\leqq a^{q-\frac{1}{k}} < a^{q+\frac{1}{k}} \\ &\leqq \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^y. \end{aligned}$$

Daher ist $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend. Der Fall $0 < a < 1$ folgt wieder durch Betrachten von $a^{-1}$.

Die Stetigkeit zeigen wir mit dem Folgekriterium Satz 2.2. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge **reeller** Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Dann finden wir zwei Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **rationaler** Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$ und $p_n \leqq x_n \leqq q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Begründen Sie das, etwa mit der Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen).

Definitionsgemäß ist $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. Aufgrund der soeben gezeigten Monotonie gilt für $a > 1$ außerdem $a^{p_n} \leqq a^{x_n} \leqq a^{q_n}$, woraus $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$ folgt. Im Fall $0 < a < 1$ gilt $a^{p_n} \geqq a^{x_n} \geqq a^{q_n}$, woraus ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$ folgt.

Sei nun $a > 1$. Wir wollen Bild $(a^x) = \mathbb{R}_{>0}$ zeigen. Für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen wir ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < x$, dann folgt aus Lemma 2.12

$$a^q < a^x.$$

Da für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Zahl $a^q$ nach Definition 2.10 positiv ist, folgt $a^x > 0$.

Ist umgekehrt $y \in \mathbb{R}_{>0}$, so finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > y$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n} < y$, denn die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt.

Nach dem Zwischenwertsatz Satz 2.4 gibt es also ein $x \in [-n, n]$ mit $a^x = y$.

Der Fall $0 < a < 1$ folgt analog. □

**Lemma 2.16** *Für alle $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

*i)* $a^{x+y} = a^x a^y$

*ii)* $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

*iii)* $a^x b^x = (ab)^x$.

**Beweis :** Das folgt aus Lemma 2.11 durch passende Grenzübergänge. □

Nach Satz 2.15 ist für jedes $a > 1$ die Potenzfunktion $x \mapsto a^x$ stetig und streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ stetig und streng monoton fallend. Nach Satz 2.15 ist ferner das Bild von $x \mapsto a^x$ ferner $\mathbb{R}_{>0}$.

**Definition 2.17** *Mit $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Umkehrfunktion zu $x \mapsto a^x$.*

Nach Proposition 2.8 ist $\log_a$ stetig und streng monoton wachsend für $a > 1$ sowie streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

**Lemma 2.18** *Sei $a > 0$.*

*i) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

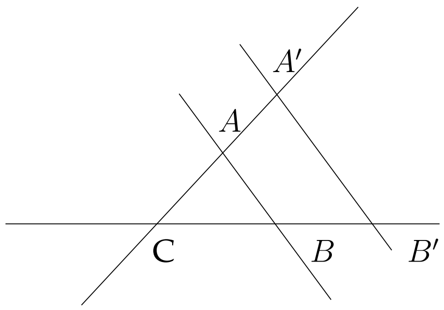
*ii) Ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $y \in \mathbb{R}$, so gilt*

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

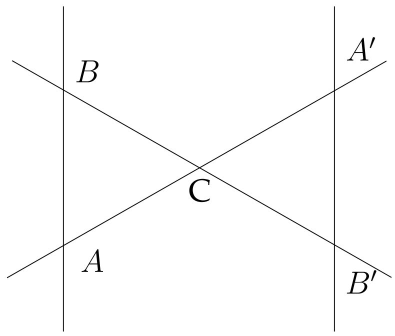
**Beweis :** Übungsaufgabe. $\square$

# 3 Trigonometrie

Wir beginnen mit den Strahlensätzen. Es seien vier Geraden gegeben, wie in den folgenden Figuren,




Figur 1




Figur 2

wobei die Gerade durch $A, B$ zur Gerade durch $A', B'$ parallel ist.

**Satz 3.1** *(1. Strahlensatz)*

*In der obigen Situation gilt*

$$\frac{|CA|}{|CA'|} = \frac{|CB|}{|CB'|},$$

*wobei $|CA|$ wie in der Elementarmathematik I die Länge der Strecken zwischen $A$ und $C$ bezeichnet.*

**Beweis :** Wir schreiben $|\triangle(XYZ)|$ für den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $X, Y$ und $Z$. Dann gilt $|\triangle(XYZ)| = \frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe. Wir nehmen zunächst an, die Situation ist wie in Figur 1. Dann gilt $|\triangle(ABA')| = \triangle(ABB')|$. (Machen Sie sich das in einer Skizze klar!)

Ergänzen wir beide Seiten um $|\triangle(A, B, C)|$, so folgt $|\triangle(A'BC)| = |\triangle(AB'C)|$, und daraus

$$\frac{|\triangle(ABC)|}{|\triangle(A'BC)|} = \frac{|\triangle(ABC)|}{|\triangle(AB'C)|}.$$

Brerechnen wir den Flächeninhalt beider Dreiecke auf der linken Seite mit den Grundseiten $|CA'|$ und $|CA|$, so haben die beiden Dreiecke dieselbe Höhe. Also gilt

$$\frac{|CA|}{|CA'|} = \frac{|\triangle(ABC)|}{|\triangle(A'BC)|}.$$

Analog ist $\frac{|CB|}{|CB'|} = \frac{|\triangle(ABC)|}{|\triangle(AB'C)|}$, woraus die Behauptung folgt. Die Situation aus Figur 2 lassen wir als Übungsaufgabe. $\square$

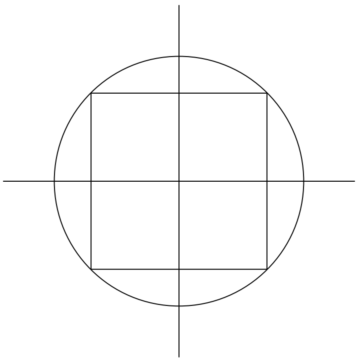
**Satz 3.2** *(2. Strahlensatz)*

*In der Situation von Figur 1 und Figur 2 gilt*

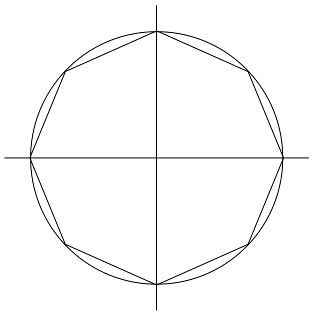
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|CA'|}.$$

**Beweis :** Übungsaufgabe. $\square$

Nun wollen wir den Umfang eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius bestimmen. Wir messen diesen Umfang, indem wir den Kreis durch regelmäßige $n-$Ecke approximieren:



$n = 4$

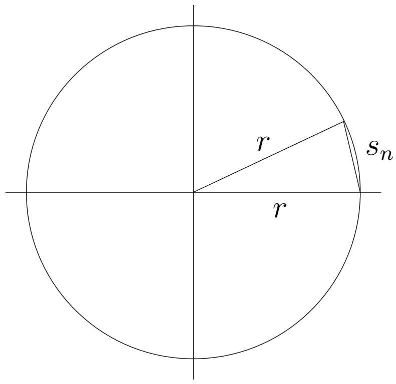


$n = 8$

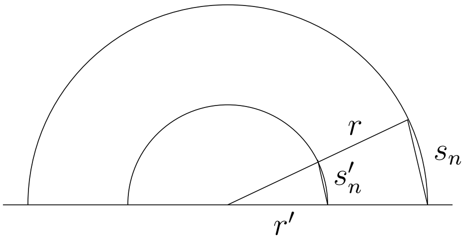
Das in den Kreis einbeschriebene regelmäßige $n-$Eck hat als Umfang offenbar

$$n \cdot s_n,$$

wobei $s_n$ die Länge einer Seite des $n-$Ecks ist:



Betrachten wir einen zweiten Kreis um denselben Mittelpunkt mit Radius $r'$, so folgt nach dem 2. Strahlensatz $\frac{s'_n}{r'} = \frac{s_n}{r}$, wobei $s'_n$ die Seitenlänge des in den zweiten Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $n-$Ecks ist:




Man kann nun zeigen, dass die Folge $(n\frac{s_n}{r})_{n\geqq 1}$ konvergiert.

Da $\frac{s_n}{r} = \frac{s'_n}{r'}$ ist, ist diese Folge und damit auch ihr Grenzwert unabhängig vom Radius.

**Definition 3.3** *Wir definieren die reelle Zahl $\pi$ als*

$$\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\frac{s_n}{r}.$$

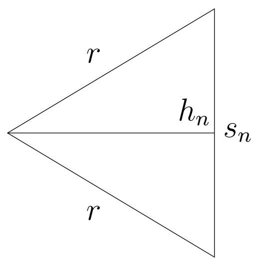
Sie ist unabhängig vom gewählten Kreis! Da der Umfang $U$ eines Kreises eines Kreises sich durch die Folge $(ns_n)_{n\geqq 1}$ approximieren lässt, folgt die bekannte Formel

$$U = 2\pi r.$$

Den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $r$ können wir durch den Flächeninhalt des einbeschriebenen $n-$Ecks approximieren. Dieser ist

$$n\frac{1}{2}h_n s_n,$$

wobei $h_n$ die Länge der Höhe auf $s_n$ in einem gleichseitigen Dreieck mit zwei Seiten der Länge $r$ und einer Seite der Länge $s_n$ ist:



Nun ist $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = r$, also konvergiert die Folge $(n\frac{1}{2}h_n s_n)_{n\geq 1}$ gegen

$$\frac{1}{2}r^2 \lim_{n\to\infty} n\frac{s_n}{r} = \frac{1}{2}r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Auf diese Weise erhalten wir die bekannte Formel für den Flächeninhalt $A$ eines Kreises vom Radius $r$:

$$A = \pi r^2.$$

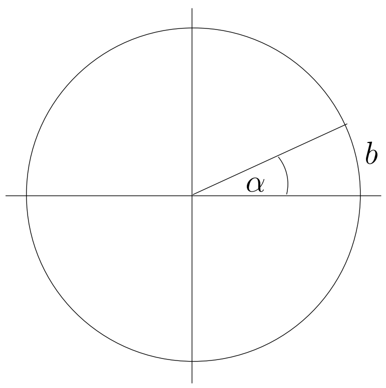
Man kann zeigen, dass die Zahl $\pi$ irrational ist, also nicht in $\mathbb{Q}$ liegt und damit eine Dezimalbruchentwicklung ohne Periode hat.

Viel schwieriger ist der Beweis, dass $\pi$ eine transzendente Zahl ist. Das bedeutet, dass es kein Polynom $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $p(\pi) = 0$ ist. Diese Tatsache wurde erst 1882 von Ferdinand Lindemann bewiesen.

Eine Zahl, die nicht transzendent ist, und somit Nullstelle eines Polynoms über den rationalen Zahlen, heißt übrigens algebraisch. So ist etwa $\sqrt{2}$ eine algebraische Zahl, denn sie ist Nullstelle des Polynoms

$$p(X) = X^2 - 2.$$

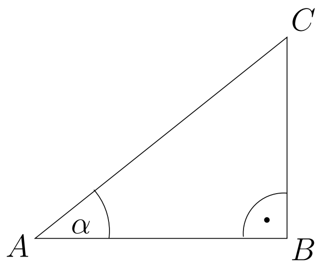
Wir ordnen nun jedem Winkel $\alpha$ die Länge des Kreisbogens $b$ eines Kreissegments mit Radius $1$ und Winkel $\alpha$ zu:




Diese Zahl nennt man das Bogenmaß des Winkels. Offenbar haben wir folgende Entsprechungen:

| Grad | 360° | 180° | 90° | 60° | 30° |
|---|---|---|---|---|---|
| Bogenmaß | $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

Nun wollen wir Sinus und Cosinus definieren. Es sei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ein Winkel im Bogenmaß und $\triangle$ ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Innenwinkel $\alpha$:




Wir definieren

$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$\triangle$ ist erst dann bis auf Kongruenz festgelegt, wenn wir noch die Hypothenusenlänge $|AC|$ festlegen.

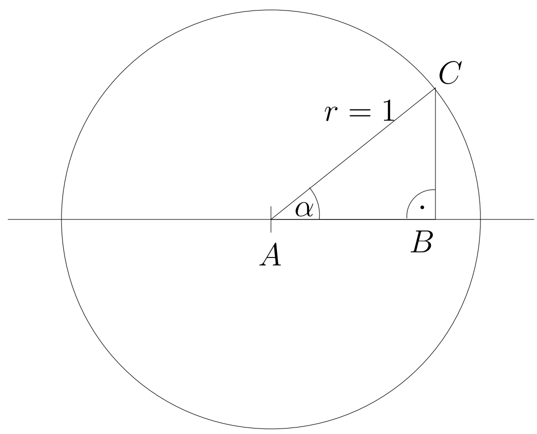
Wieder zeigt ein Argument mit dem Strahlensatz, dass $\sin\alpha$ unabhängig von der Wahl von $\triangle$ ist (Übungsaufgabe)!

Analog ist auch

$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

unabhängig von der Wahl von $\triangle$.

Dann gilt für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ : Zeichnen wir in einen Kreis mit Nullpunkt $A$ und Radius $1$ in $A$ einen positiv orientierten Winkel der Länge $\alpha$ über dem Radius, der auf der $x-$Achse liegt, ein, so hat der Schnittpunkt $C$ des zweiten Schenkels mit dem Kreisbogen



die Koordinaten

$$(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Mit dieser Beschreibung können wir $\sin$ und $\cos$ zu Funktionen

$$\begin{aligned} \sin: &\quad [\,0, 2\pi\,[\, \to \mathbb{R} \\ \cos: &\quad [\,0, 2\pi\,[\, \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

fortsetzen. Wir setzen sie sogar auf ganz $\mathbb{R}$ fort, indem wir

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sin(x) & = & \sin(\alpha) \\ \cos(x) & = & \cos(\alpha) \end{array} \right\} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi[ \text{ und } x - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$$

definieren.

Insbesondere gilt also

$$\sin(0) = 0, \text{ und somit } \sin(2\pi k) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, und analog

$$\cos(0) = 1, \text{ und somit } \cos(2\pi k) = 1$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

**Lemma 3.4** *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

*i)* $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$; $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$

*ii)* $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$; $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$.

**Beweis :** Übungsaufgabe. □

Ferner haben wir

**Satz 3.5** *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

**Beweis :** Das folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras. □

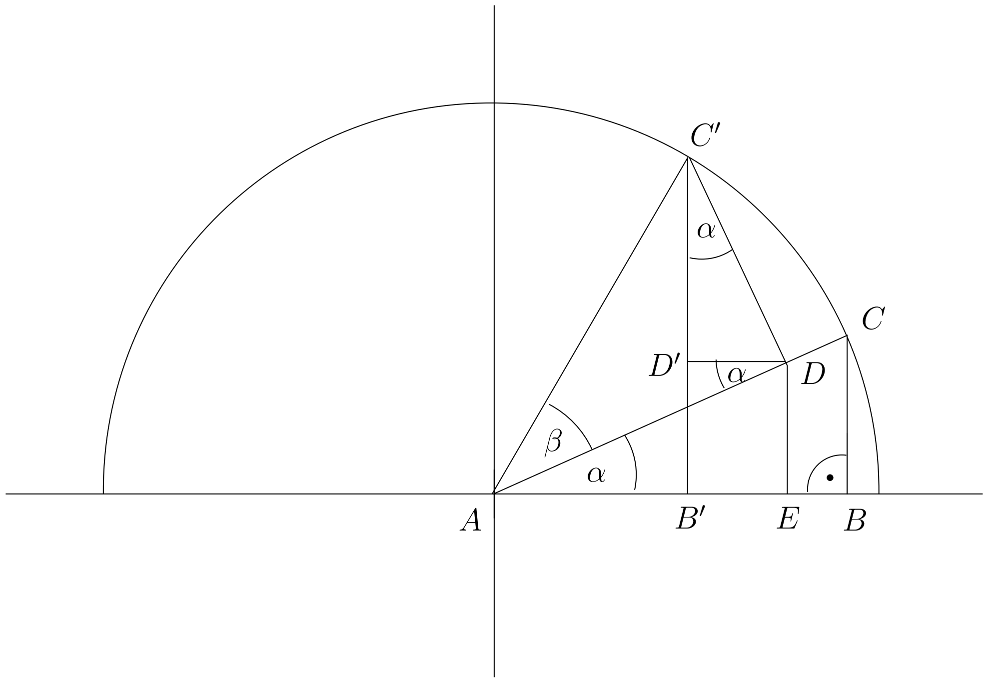
**Satz 3.6** *(Additionstheoreme) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

*i)* $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

*ii)* $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

**Beweis :** Das müssen wir nach Lemma 3.4 nur für $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ zeigen. □

Wir betrachten hier nur den Fall $\alpha + \beta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Den Fall $\alpha + \beta \geqq \frac{\pi}{2}$ lassen wir als Übungsaufgabe. Dann haben wir folgende Situation:




Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \cos\alpha = \frac{|A\ E|}{|A\ D|} & , & \sin\alpha = \frac{|DD'|}{|C'D|} \\ \cos\beta = |AD| & , & \sin\beta = |C'D|. \end{array}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) = |AB'| &= |AE| - |B'E| \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Analog zeigt man das Additionstheorem für sinus.

**Korollar 3.7** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \textit{ und } 1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

**Beweis :** Das folgt leicht aus den Additionstheoremen Satz 3.6 mit Satz 3.5 (Übungsaufgabe). □

**Definition 3.8** *Wir setzen für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$*

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

*und für* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$

*Für* $\alpha \notin \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ *gilt also*

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\cot(\alpha)}.$$

Jetzt wollen wir die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos, \tan, \cot$ auf ihre Stetigkeit untersuchen. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

**Lemma 3.9** *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$|\sin\alpha| \leq |\alpha|$$

*und*

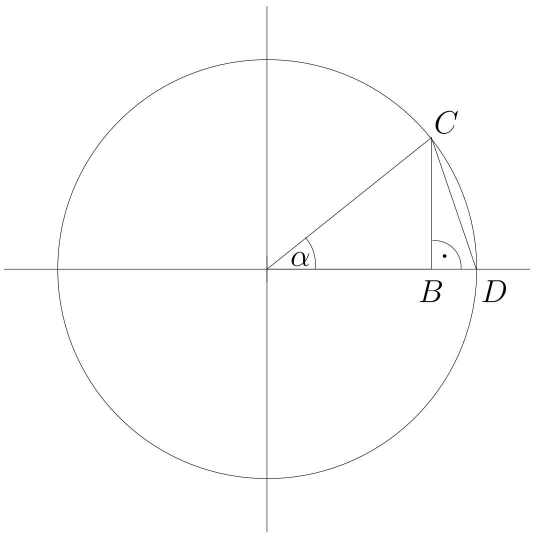
$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \leqq \cos\alpha \leqq 1.$$

**Beweis :** Nach Satz 3.6 ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|\sin\alpha| \leqq 1,$$

also brauchen wir für die erste Ungleichung nur $|\alpha| \leqq 1 < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten.

Definitionsgemäß ist in diesem Fall $\sin\alpha = |CB|$ in folgender Skizze:




Außerdem gilt nach dem Satz des Pythagoras $|CB| \leqq |CD|$, und da eine Strecke die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, ist der Kreisbogen zwischen $C$ und $D$ länger als die Strecke $\overline{CD}$. Dieser Kreisbogen hat die Bogenlänge $\alpha$, woraus

$$\sin\alpha \leqq \alpha$$

folgt.

Nach Korollar 3.7 gilt

$$1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

also folgt

$$1 - \cos(\alpha) \leqq 2\Big|\frac{\alpha}{2}\Big|^2 = \frac{\alpha^2}{2}$$

und damit die zweite Ungleichung. $\square$

**Satz 3.10** *Die Funktionen* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig.*

**Beweis :** Wir zeigen zunächst die Stetigkeit in $0$ mit dem Folgenkriterium Satz 2.2. Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann folgt aus Lemma 3.9

$$|\sin\alpha_n - \sin 0| = |\sin\alpha_n| \leqq |\alpha_n|,$$

also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\alpha_n = \sin 0$. (Führen Sie dieses Argument aus!)

Analog ist nach Satz 3.10

$$\begin{aligned} |\cos\alpha_n - \cos(0)| &= |\cos\alpha_n - 1| \\ &= |1 - \cos\alpha_n| \\ &\leqq \tfrac{\alpha_n^2}{2}, \end{aligned}$$

woraus $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\alpha_n = \cos 0$ folgt.

Ist nun $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n - \alpha$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha) = 0$, also nach dem eben gezeigten auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\alpha_n - \alpha) = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\cos(\alpha_n - \alpha) - 1\big) = 0$.

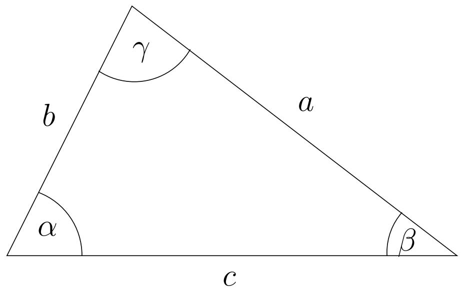
Daher folgt aus den Additionstheoremen Satz 3.6

$$\begin{aligned} & |\sin(\alpha_n) - \sin\alpha| \\ = \; & |\sin\big((\alpha_n - \alpha) + \alpha\big) - \sin\alpha| \\ = \; & |\sin(\alpha_n - \alpha)\cos\alpha + \cos(\alpha_n - \alpha)\sin\alpha - \sin\alpha| \\ \leqq \; & |\sin(\alpha_n - \alpha)||\cos\alpha| + |\cos(\alpha_n - \alpha) - 1||\sin\alpha| \\ & \xrightarrow[n\to\infty]{} 0|\cos\alpha| + 0|\sin\alpha| = 0, \end{aligned}$$

woraus $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\alpha_n = \sin\alpha$ folgt.

Also ist nach Satz 2.2 die Sinus-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Wegen $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ ist die Cosinus-Funktion als Verkettung stetiger Funktionen nach Lemma 2.3 ebenfalls stetig. $\square$

**Satz 3.11** *(Sinus- und Cosinussatz) Wir betrachten ein Dreieck mit Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$, so dass die gegenüberliegenden Seiten die Längen $a, b, c$ haben:*



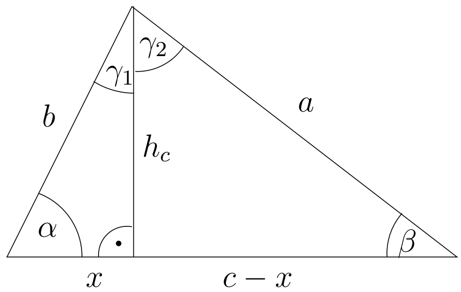

*Dann gilt:*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

*und*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma.$$

**Beweis :** Wir nehmen zunächst an, das Dreieck ist spitzwinklig, das heißt, $\alpha, \beta, \gamma$ sind alle $< \frac{\pi}{2}$. Dann gilt mit den Bezeichnungen der folgenden Skizze




$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ und $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$, woraus $h_c = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{\sin\beta}{a}$ und daher $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ folgt.

Mit einer weiteren Höhe erhalten wir auch die Gleichheit dieser beiden Größen zu $\frac{\sin\gamma}{c}$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt außerdem

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + h_c^2 \text{ und} \\ a^2 &= (c-x)^2 + h_c^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} & c^2 - a^2 - b^2 \\ =\ & c^2 - x^2 - h_c^2 - (c-x)^2 - h_c^2 \\ =\ & -2(x^2 + h_c^2 - cx). \end{aligned}$$

Wir müssen also noch zeigen, dass

$$x^2 + h_c^2 - cx = ab\ \cos\gamma$$

gilt.

Dazu teilen wir $\gamma$ in $\gamma_1$ und $\gamma_2$ auf. Es ist $\sin\gamma_1 = \frac{x}{b}, \sin\gamma_2 = \frac{c-x}{a}, \cos\gamma_1 = \frac{h_c}{b}, \cos\gamma_2 = \frac{h_c}{a}$.

Wir verwenden das Additionstheorem Satz 3.6 und erhalten

$$\cos\gamma = \cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 \sin\gamma_2$$

Das liefert

$$\begin{aligned} ab\ \cos\gamma &= ab\frac{h_c}{b}\frac{h_c}{a} - ab\frac{x}{b}\frac{c-x}{a} \\ &= h_c^2 - x(c-x) \\ &= h_c^2 - cx + x^2, \end{aligned}$$

woraus unsere Behauptung folgt. Den Fall eines stumpfen Winkels lassen wir als Übungsaufgabe. □

# 4 Komplexe Zahlen

Wir wollen nun noch einen weiteren Zahlbereich kennenlernen, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, die die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthalten.

**Definition 4.1** *Wir definieren*

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

*als Menge aller* $2-$*Tupel reeller Zahlen. Für diese Menge schreibt man oft auch* $\mathbb{R}^2$. *Auf* $\mathbb{C}$ *definieren wir durch*

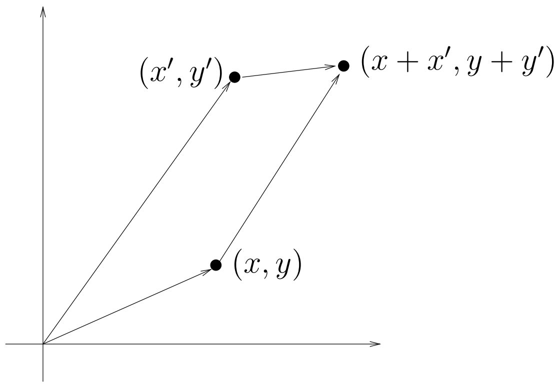
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

*eine Addition und durch*

$$(x, y)(x'y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

*eine Multiplikation.*

Wir nennen $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Zeichnen wir eine komplexe Zahl als Punkt mit Koordinaten $(x, y)$ in die Ebene, so entspricht die Addition zweier komplexer Zahlen gerade der Vektoraddition:




Wie man das auf den ersten Blick vielleicht etwas unmotivierte Produkt geometrisch interpretiert, werden wir später sehen.

Wir betten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x, 0) \end{array}$$

in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein. Diese Abbildung ist injektiv und erfüllt

$$i(x + y) = i(x) + i(y) \text{ sowie } i(xy) = i(x)i(y)$$

(Übungsaufgabe).

**Satz 4.2** $\mathbb{C}$ *zusammen mit der Addition und der Multiplikation ist ein Körper im Sinne von [We], Definition 5.6.*

**Beweis :** Wir müssen folgendes zeigen:

i) Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind assoziativ, kommutativ und distributiv. Das ist eine einfache Übungsaufgabe.

ii) Es gibt ein neutrales Element $0$ bezüglich der Addition und ein neutrales Element $1$ bezüglich der Multiplikation, und es gilt $1 \neq 0$. Hier setzen wir $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 0) = i(1)$. Den Nachweis der Neutralität lassen wir als Übungsaufgabe.

iii) Jedes Element aus $\mathbb{C}$ hat ein Inverses bezüglich der Addition und jedes Element aus $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ hat ein Inverses bezüglich der Multiplikation.

Ist $(x, y) \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0),$$

also ist $(-x,-y)$ ein additives Inverses.

Ist $(x,y) \in \mathbb{C}$ mit $(x,y) \neq 0$, so ist auch $x^2+y^2 \neq 0$. Also ist $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = (1,0).$$

Wie man auf dieses Inverse kommt, werden wir später besser verstehen, wenn wir die Multiplikation geometrisch interpretieren. □

Wir schreiben in Zukunft für jedes $x \in \mathbb{R}$ einfach $x$ anstatt $i(x) = (x,0)$. Zudem setzen wir $i = (0,1)$. Dann lässt sich jede Zahl $(x,y) \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$(x,y) = (x,0)(1,0) + (y,0)(0,1) = x + iy.$$

Es ist außerdem

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Somit enthält der Körper $\mathbb{C}$ eine Quadratwurzel der Zahl $-1$! Mit Hilfe dieser Zahl $i$ können wir aus jeder negativen reellen Zahl eine Wurzel ziehen, denn für jedes $\alpha < 0$ in $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{-\alpha} \in \mathbb{R}$ und

$$(\sqrt{-\alpha}\, i)^2 = (-\alpha)(-1) = \alpha.$$

**Definition 4.3** *Ist $z = (x,y) = x + iy$ eine komplexe Zahl, so heißt $x$ Realteil und $y$ Imaginärteil von $z$. Wir schreiben $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$.*

*Die Zahl $\overline{z} = (x,-y) = x - iy$ bezeichnen wir als komplex konjugierte Zahl zu $z$.*

**Lemma 4.4** *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.*

*i) Es gilt $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.*

*ii) Es ist $\overline{zw} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$*

*iii) $\overline{\overline{z}} = z$*

*iv) Ist $z = x + iy$, so ist*

$$z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2$$

*eine Zahl in $\mathbb{R}_{\geqq 0}$.*

*v) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, falls $z \neq 0$.*

**Beweis :**

i) $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$, also ist

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}).$$

$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$, also ist

$$y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

ii) und iii) sind leichte Übungsaufgaben.

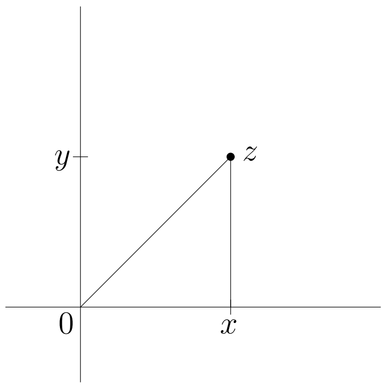
iv) Ist $z = x + iy$, so ist $\overline{z} = x - iy$

$$\text{und } z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) \begin{array}{l} = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ = x^2 + y^2. \end{array}$$

v) Für $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ gilt $z \cdot \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = 1$, also ist $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = z^{-1}$. Alternativ kann man die Formel aus dem Beweis von Satz 4.2 verwenden.

$\square$

Zeichnen wir den Punkt $z = (x, y)$ in ein Koordinatensystem ein




so gilt nach dem Satz des Pythagoras, dass die Strecke von $0$ nach $z$ die Länge $\sqrt{x^2 + y^2}$ hat. Dieser Abstand von $z$ zu $0$ liefert einen Betrag auf den komplexen Zahlen.

**Definition 4.5** *Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir*

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}.$$

*Ist $z = x + iy$, so ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Dies erfüllt folgende Eigenschaften, die man üblicherweise von einem Betrag verlangt:

**Lemma 4.6** *Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ komplexe Zahlen. Dann gilt*

*i)* $|z| \geqq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$.

*ii)* $|zw| = |z||w|$, *der Betrag ist also multiplikativ.*

*iii)* $|z + w| \leqq |z| + |w|$, *also gilt die Dreiecksungleichung.*

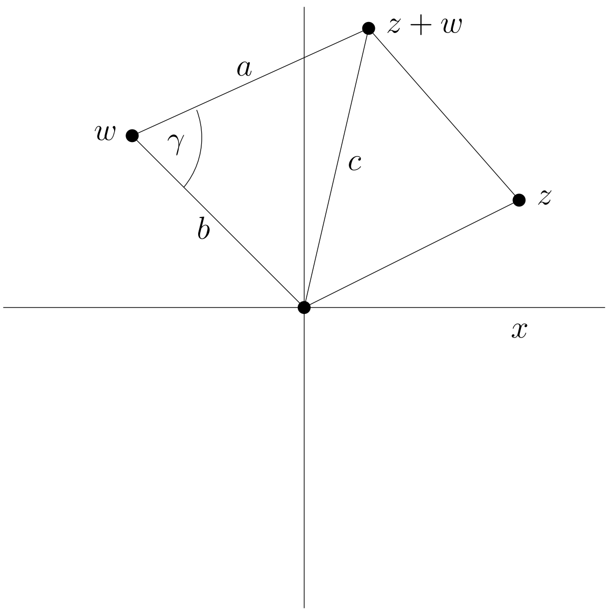
**Beweis :**

i) Es ist $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ genau dann, wenn $x^2 + y^2 = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = y = 0$ gilt.

ii) Es ist

$$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{(zw)\overline{(zw)}} = \sqrt{zw\overline{z}\,\overline{w}} \\ &= \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z||w|. \end{aligned}$$

iii) Das zeigen wir geometrisch, indem wir das Dreieck mit den Ecken $0, w$ und $z + w$ betrachten:




In dem Dreieck mit den Ecken $0, w$ und $z+w$ ist die Seitenlänge $a = |z|$, die Seitenlänge $b = |w|$ und $c = |z+w|$.

Aus dem Cosinussatz Satz 3.11 folgt

$$\begin{aligned} |z+w|^2 = c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2ab\cos\gamma \\ &\leqq a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a+b)^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

denn $-\cos\gamma \leqq 1$.

Daraus folgt $|z+w| \leqq |z| + |w|$. □

Wir definieren nun konvergente Folgen und Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $a_n \in \mathbb{C}$ genau wie über den reellen Zahlen, indem wir einfach den reellen Absolutbetrag durch den komplexen ersetzen. (Schreiben Sie diese Definitionen aus!)

**Lemma 4.7** *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.*

*i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn $\big(Re(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(Im(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen reeller Zahlen sind.*

*ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} Re(a_n) = Re(a)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Im(a_n) = Im(a)$ gilt.*

Wir betrachten nun eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $|z| = 1$. Dann liegt $z$ auf dem Kreis mit Radius $1$ um den Nullpunkt. Also gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit $x = \cos(\alpha)$ und $y = \sin(\alpha)$.

Für eine beliebige komplexe Zahl $z$ hat $\frac{z}{|z|}$ den Betrag $1$. Daher gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ mit $\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, woraus

$$z = |z|\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big)$$

folgt. Der Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ ist durch $z$ eindeutig festgelegt, wir schreiben

$$\alpha = \arg(z)$$

und nennen $\alpha$ das Argument der komplexen Zahl $z$. Jeder komplexen Zahl $z$ ordnen wir das Tupel $\big(|z|, \arg(z)\big) \in \mathbb{R}_{\geqq 0} \times [0, 2\pi[$ zu. Wir nennen $\big(|z|, \arg(z)\big)$ die Polarkoordinaten von $z$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqq 0} \times [0, 2\pi[ \\ z & \longmapsto & \big(|z|, \arg(z)\big) \end{array}$$

ist bijektiv (Übungsaufgabe).

Mit Hilfe der Polarkoordinaten wollen wir nun die Multiplikation von komplexen Zahlen beschreiben.

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit Polarkoordinaten $\big(|z|, \alpha = \arg(z)\big)$ und $\big(|w|, \beta = \arg(w)\big)$.

Dann ist $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$, also

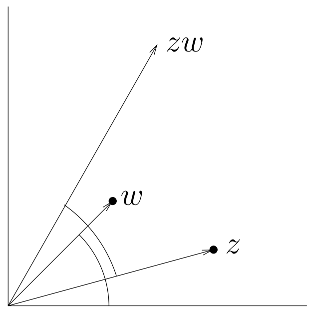
$$\begin{array}{rcl} z \cdot w & = & |z||w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ & = & |zw|(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ & = & |zw|\big(\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big) \end{array}$$

nach den Additionstheoremen Satz. Also entspricht die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten einfach der Verknüpfung

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}_{\geqq 0} \times [0, 2\pi[) & \times & (\mathbb{R}_{\geqq 0} \times [0, 2\pi[) & \to & \mathbb{R}_{\geqq 0} \times [0, 2\pi[ \\ \big((r, \alpha) & , & (s, \beta)\big) & \mapsto & (rs, \alpha + \beta \mod 2\pi), \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta \mod 2\pi$ diejenige Zahl $\gamma \in [0, 2\pi[$ ist mit $\alpha + \beta - \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Geometrisch lässt sich die Multiplikation mit $w \in \mathbb{C}$ als Drehstreckung mit Winkel $\arg(w)$ und Streckfaktor $|w|$ deuten.




Die komplexen Zahlen haben die wichtige Eigenschaft, dass man in $\mathbb{C}$ alle Polynomgleichungen lösen kann. Das heißt, ist

$$a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = 0$$

eine Polynomgleichung mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, so dass nicht alle $a_i = 0$ sind für $i > 0$, so gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = 0.$$

Die reellen Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, wie die Gleichung $x^2+1 = 0$ zeigt. Aus dieser Tatsache folgt

**Satz 4.8** *(Fundamentalsatz der Algebra)*
*Es sei $P(X) = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann gibt es (nicht notwendig) verschiedene $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$P(X) = (X - z_1) \cdot (X - z_2) \cdot \ldots \cdot (X - z_n).$$

Mit anderen Worten: Jedes Polynom zerfällt über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren.

Das kann man aus der oben diskutierten Existenz von Nullstellen für alle nichtkonstanten Polynome folgern, indem man sukzessive durch Linearfaktoren teilt (Übungsaufgabe).

**Beispiel:** ($n-$te Einheitswurzeln) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$X^n - 1 = (X - \zeta_0)(X - \zeta_1) \ldots (X - \zeta_{n-1})$$

für komplexe Zahlen $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$, so dass für alle $i = 0, \ldots, n-1$

$$\zeta_i^n = 1$$

gilt. Wir nennen $\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ die $n-$ten Einheitswurzeln. Für $n = 1$ ist $\zeta_0 = 1$, für $n = 2$ ist $\zeta_0 = 1$ und $\zeta_1 = -1$. Das kennen wir schon aus den reellen Zahlen. Für gerade Exponenten $n$ ist immer $1$ und $-1$ unter den $\zeta_i$, für ungerade Exponenten $n$ nur $1$. Wie sehen die anderen $n-$ten Einheitswurzeln aus? Ist $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = 1$, so folgt zunächst $|\zeta| = 1$. In Polarkoordinaten sieht $\zeta$ also so aus: $\big(1, \arg(\zeta)\big)$. Aus $\zeta^n = 1$ folgt $n \arg(\zeta) \mod 2\pi = 0$, also

$$n \arg(\zeta) = 2\pi k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $\arg(\zeta) = 2\pi \frac{k}{n}$ und somit $\zeta = \cos 2\pi \frac{k}{n} + i \sin 2\pi \frac{k}{n}$.

Das Argument von $\zeta$ nimmt also im Intervall $[0, 2\pi[$ einen der $n$ verschiedenen Werte

$$\frac{2\pi}{n}, 2\pi\frac{2}{n}, 2\pi\frac{3}{n}, \dots, 2\pi\frac{n-1}{n}$$

an. Umgekehrt liefert jedes $k \in \{0, \dots, n-1\}$ eine komplexe Zahl $\zeta_k = \cos(2\pi \frac{k}{n}) + i \sin(2\pi \frac{k}{n})$ mit $\zeta^n = 1$. Damit haben wir alle $n-$ten Einheitswurzeln bestimmt. Es sind die Zahlen

$$\zeta_k = \cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right) + i \sin\left(2\pi\frac{k}{n}\right)$$

für $k = 0, \dots, n-1$.

Als Punkte auf dem Einheitskreis sind das gerade die Ecken eines regelmäßigen $n-$Ecks.

Die $n-$ten Einheitswurzeln lassen sich auch durch die Exponentialfunktion beschreiben.

**Proposition 4.9** *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die unendliche Reihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

**Beweis :** Wir müssen zeigen, dass für alle $z$ die Folge der Partialsummen

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)_{N \in \mathbb{N}}$$

konvergiert. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass diese Folge eine Cauchyfolge ist. Wir fixieren ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt für alle $|z| \leqq c$ und alle $N \geqq M \geqq c$

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=M}^{N} \tfrac{z^n}{n!}\Big| &\leqq \sum_{n=M}^{N} \tfrac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=M}^{N} \tfrac{c^n}{n!} \leqq \tfrac{c^M}{M!} \sum_{n=M}^{N} \tfrac{c^{n-M}}{(M+1)\cdot\ldots\cdot n} \\
&\leqq \tfrac{c^M}{M!}\Big(1 + \tfrac{c}{M+1} + \tfrac{c^2}{(M+1)(M+2)} + \ldots + \tfrac{c^{N-M}}{(M+1)\cdot\ldots\cdot n}\Big) \\
&\leqq \tfrac{c^M}{M!}\Big(\sum_{k=0}^{N-M} \tfrac{c^k}{(M+1)^k}\Big) \\
&\leqq \tfrac{c^M}{M!} \tfrac{1}{1-\frac{c}{M+1}}
\end{aligned}$$

nach der geometrischen Reihe, denn $\frac{c}{M+1} < 1$.

Also ist für alle $|z| \leqq c$ die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge (Übungsaufgabe), daher konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ in der Tat für alle $|z| \leqq c$.

Diese Konvergenz ist auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqq c\}$ sogar gleichmäßig, das heißt, die Folgenindizes in der Definition der Konvergenz hängen nicht vom Punkt $z$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqq c\}$ ab. $\square$

**Satz 4.10** *(Funktionalgleichung von* $\exp$*)*
*Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w).$$

*Insbesondere ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *der Wert* $\exp(z) \neq 0$*, und es gilt* $\exp(-z) = \big(\exp(z)\big)^{-1}$.

**Beweis :** Hier benutzen wir einen Trick aus der Analysis: Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Exponentialreihe lassen sich die Reihenglieder beliebig umordnen, ohne dass der Wert der Reihe sich ändert. Daher können wir folgender Rechnung Sinn geben:

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} z^k \tfrac{1}{(n-k)!} w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \tfrac{1}{k!} z^k \tfrac{1}{l!} w^l \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{z^k}{k!}\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \tfrac{w^l}{l!}\Big) = \exp(z)\exp(w).
\end{aligned}$$

Der Zusatz folgt leicht aus $\exp(0) = 1$ (Übungsaufgabe). $\square$

**Korollar 4.11** *Setzt man* $e = \exp(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$*, so gilt* $e^x = \exp(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*, wobei die Potenz* $e^x$ *wie in §3 definiert ist. Die Zahl* $e$ *heißt auch Euler'sche Zahl.*

**Beweis :** Übungsaufgabe. $\square$

Ist $z = x + iy$ eine komplexe Zahl mit $\overline{z} = x - iy$, so folgt aus Satz 4.10

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$$

sowie

$$\begin{aligned}\exp(\overline{z}) &= \exp(x)\exp(-iy)\\ &= \exp(x)\big(\exp(iy)\big)^{-1}.\end{aligned}$$

Nun ist aber andererseits (wieso ?)

$$\exp(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)},$$

also folgt

$$\begin{aligned}\exp(\overline{z}) &= \overline{\exp(z)}, \text{ und daher}\\ \exp(iy)^{-1} &= \exp(-iy) = \overline{\exp(iy)},\end{aligned}$$

woraus $|\exp(iy)|^2 = \exp(iy)\overline{\exp(iy)} = 1$ und daher auch $|\exp(iy)| = 1$ folgt.

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ liegt also die komplexe Zahl $\exp(iy)$ auf dem Einheitskreis. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ folgt daraus

$$|\exp(z)| = \exp\big(\text{Re}(z)\big)$$

(Übungsaufgabe).

Man kann zeigen, dass

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$$

gilt. Dazu benötigt man die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\cos(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}\\ \text{und } \sin(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

die wir hier nicht bewiesen haben. Insbesondere gilt die „schönste Formel der Mathematik"

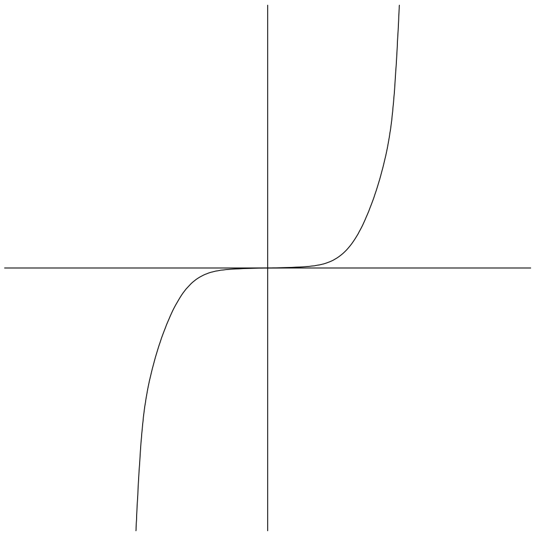
$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

und wir erhalten folgende Formel für die $n-$ten Einheitswurzeln $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ :

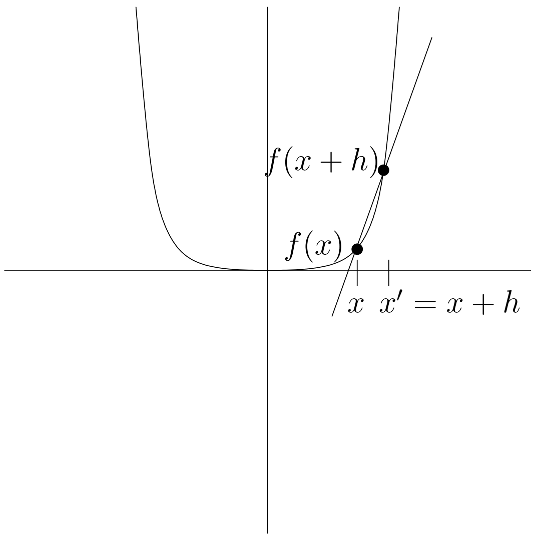
$$\begin{aligned}\zeta_k &= \cos(2\pi\tfrac{k}{n}) + i\sin(2\pi\tfrac{k}{n})\\ &= \exp(2\pi i\tfrac{k}{n})\end{aligned}$$

# 5 Die Ableitung

Wenn wir stetige Funktionen wie etwa die Parabeln $f(x) = x^n$ für $n \geqq 2$ betrachten, dann wachsen diese für betragsmäßig große $x$ deutlich stärker an als für $x$ nahe bei $0$:



Wie stark sich eine Funktion in Nähe eines Wertes $\big(x, f(x)\big)$ ändert, kann man durch Betrachten der Geraden durch $\big(x, f(x)\big)$ und $\big(x', f(x')\big)$ für $x'$ nahe an $x$ erklären:




Wir schreiben $x' = x + h$ für ein $h \in \mathbb{R}$ nahe an $0$, dann liegt $x'$ nahe an $x$. Die Differenz $h$ kann auch negativ sein, dann liegt $x'$ links von $x$ auf der $x-$Achse.

Die Steigung der Geraden durch die Punkte $\big(x, f(x)\big)$ und $\big(x+h, f(x+h)\big)$ wird gegeben durch

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Lassen wir hier $h$ gegen Null gehen, so erhalten wir einen Wert, der die lokale Änderungsrate von $f$ in $x$ misst. Um diesen Grenzübergang sauber zu beschreiben, benötigen wir folgende Definition.

**Definition 5.1** *Es sei* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall mit* $x_0 \in ]a,b[$ *und* $f : ]a,b[ \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann sagen wir,* $f$ *konvergiert für* $x \to x_0$ *gegen* $c \in \mathbb{R}$*, und schreiben*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c,$$

*falls gilt: Für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $]a,b[\setminus\{x_0\}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *ist* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit ist eine Funktion $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in ]a,b[$, wenn im Sinne von Definition 5.1 gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Lemma 5.2** *Sind* $f, g : ]a,b[\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen mit* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ *und* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = d$*, so gilt*

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = c+d \\ &\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = cd \\ \textit{und}\quad &\lim_{x\to x_0} \left(\tfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \tfrac{c}{d}, \textit{ falls } d \neq 0 \textit{ ist.} \end{aligned}$$

**Beweis :** Übungsaufgabe. □

Jetzt können wir definieren:

**Definition 5.3** *Es sei* $]a,b] \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ *eine Funktion sowie* $x \in ]a,b[$ *ein Punkt im Definitionsbereich.*

*Dann heißt* $f$ *in* $x$ *differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$f'(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

*existiert. Wir nennen* $f'(x)$ *die Ableitung von* $f$ *im Punkt* $x$.

*Die Funktion* $f$ *heißt auf* $]a,b[$ *differenzierbar, falls* $f$ *in allen Punkten* $x \in ]a,b[$ *differenzierbar ist.*

**Beispiel**

i) Sei $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f$ auf $]a, b[$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in ]a, b[$, denn wir haben

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

ii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ (also die Identität) ist ebenfalls in allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, denn es gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x - h - x}{h} = 1,$$

also ist $f'(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1$.

iii) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Dazu betrachten wir die Folge $h_n = \frac{1}{n}$ und die Folge $h'_n = -\frac{1}{n}$. Sowohl $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $0$, aber es gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} & = & \frac{|h_n|}{h_n} = 1 \\ \text{und} \quad \frac{f(0+h'_n)-f(0)}{h'_n} & = & \frac{|h'_n|}{h'_n} = -1, \end{array}$$

also konvergieren diese beiden Ausdrücke für $n \to \infty$ nicht gegen denselben Grenzwert (vergleichen Sie mit Definition 5.1).

iv) Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

ist differenzierbar mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, denn für $h$ mit $x + h \neq 0$ gilt

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{x+h},$$

und dieser Term konvergiert für $h \to 0$ gegen $-\frac{1}{x^2}$.

**Satz 5.4** *(Differenzierbare Funktionen sind stetig)*

*Ist $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x$, so ist $f$ auch stetig in $x$.*

**Beweis :** Wir müssen zeigen, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $]a,b[$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Wir müssen dazu nur die Folgenglieder $x_n \neq x$ betrachten. Setzen wir $h_n = x_n - x$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x) &= f(x+h_n) - f(x) \\ &= \tfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \cdot h_n \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x)\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

also folgt in der Tat $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. □

Die Differenzierbarkeit von Funktionen bleibt unter einer Reihe von natürlichen Konstruktionsprinzipien erhalten.

**Proposition 5.5** *Es sei $]a,b[\subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ sowie $g\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

*i)* $f+g\ :]a,b[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+g(x)$, *ist differenzierbar mit* $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ *für alle* $x \in ]a,b[$.

*ii) (Produktregel)* $fg\ :]a,b[\to \mathbb{R}, x\mapsto f(x)g(x)$, *ist differenzierbar mit*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

*Insbesondere ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ auch $(cf)(x) = cf(x)$ differenzierbar mit $(cf)'(x) = cf'(x)$.*

**Beweis :**

i) folgt direkt aus der Tatsache, dass Grenzwerte von Folgen mit der Addition vertauschen (Übungsaufgabe).

ii) Hier benutzen wir folgenden Trick: Für alle $x \in ]a,b[$ und $h \neq 0$ mit $x+h \in ]a,b[$ gilt

$$\begin{aligned} &\tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ =\ &\tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ =\ &g(x+h)\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\tfrac{g(x+h)-g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Da $g$ nach Satz 5.4 stetig in $x$ ist, gilt $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. Also konvergiert der gesamte Differenzenquotient für $h\to 0$ gegen

$$g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

□

Aus der Produktregel folgt mit Induktion nach $n$, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

differenzierbar ist mit $f'(x) = nx^{n-1}$ (Übungsaufgabe).

Also ist mit Proposition 5.5 auch jede Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

**Proposition 5.6** *(Kettenregel)*

*Es seien $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ und $g : ]c,d[ \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit*

$$f(]a,b[) \subset ]c,d[.$$

*Dann ist auch die Hintereinanderausführung*

$$\begin{aligned} g \circ f : ]a,b[ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

*differenzierbar auf $]a,b[$ und es gilt*

$$(g \circ f)(x)' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).$$

**Beweis :** Es sei $x \in ]a,b[$ sowie $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n \neq 0$ sowie $x + h_n \in ]a,b[$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist $f(x+h_n) \neq f(x)$, so können wir erweitern:

$$\frac{g\big(f(x+h_n)\big) - g\big(f(x)\big)}{h_n} = \frac{g\big(f(x+h_n)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h_n) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$$

Der erste Faktor konvergiert wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+h_n) = f(x)$ gegen $g'\big(f(x)\big)$, der zweite Faktor konvergiert gegen $f'(x)$. Daraus folgt die Behauptung für den Fall, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(x+h_n) \neq f(x)$ für alle $n \geqq N$.

Falls dies nicht der Fall ist, dann gibt es eine Teilfolge $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x+h'_n) = f(x)$. Daraus folgt $f'(x) = 0$, denn $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+h'_n)-f(x)}{h'_n}$. Außerdem folgt wegen der Stetigkeit von $g$, dass

$$\lim_{n\to\infty} g\big(f(x+h_n)\big) - g\big(f(x)\big) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x+h'_n)\big) - g\big(f(x)\big) = 0$$

gilt. Daher gilt auch in diesem Fall die Behauptung. □

**Proposition 5.7** *(Quotientenregel)*

*Es seien* $f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ *differenzierbare Funktionen, so dass* $g(x) \neq 0$ *ist für alle* $x \in ]a,b[$. *Dann ist auch die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g} : ]a,b[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

*differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Beweis :** Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\frac{1}{g} : ]a,b[ \to \mathbb{R}.$$

$\frac{1}{g}$ ist die Verknüpfung von $g$ mit $i : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, i(x) = \frac{1}{x}$. Oben haben wir gesehen, dass $i'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ist. Nach der Kettenregel ist also $\frac{1}{g}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = i'\big(g(x)\big)g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Jetzt wenden wir die Produktregel auf $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ an und erhalten die Behauptung (Übungsaufgabe). $\square$

**Proposition 5.8** *Die Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind differenzierbar auf* $\mathbb{R}$. *Es gilt*

$$\sin'(x) = \cos(x) \textit{ und } \cos'(x) = -\sin(x)$$

**Beweis :** Ähnlich wie bei der Stetigkeit folgern wir die Differenzierbarkeit aus der Differenzierbarkeit in $0$.

Nach Lemma 3.9 wissen wir $|\sin(x)| \leqq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\frac{\sin x}{x} \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem benutzen wir die Abschätzung

$$|\cos x| \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

für $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$, die wir hier nicht beweisen. Damit folgt für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\frac{\sin h_n - \sin 0}{h_n} = \frac{\sin h_n}{h_n}$$

sich abschätzen lässt als

$$\cos h_n \leqq \frac{\sin h_n}{h_n} \leqq 1.$$

Da $\cos(x)$ stetig in $0$ mit $\cos(0) = 1$ ist, konvergiert die linke Seite der Ungleichung gegen $1$. Also folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin h_n}{h_n} = 1 = \cos(0),$$

und somit ist der Sinus differenzierbar in $0$ mit $\sin'(0) = \cos(0)$.

Ähnlich argumentieren wir für den Cosinus. Für eine Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben ist

$$\frac{\cos(h_n) - \cos(0)}{h_n} = \frac{\cos(h_n) - 1}{h_n}.$$

Nach Lemma 3.9 können wir $\cos(h_n) - 1$ abschätzen als

$$-\frac{h_n^2}{2} \leqq \cos(h_n) - 1 \leqq 0,$$

also folgt für $h_n > 0$

$$-\frac{h_n}{2} \leqq \frac{\cos(h_n) - 1}{h_n} \leqq 0$$

und für $h_n < 0$ (Achtung, die Ungleichung dreht sich um)

$$-\frac{h_n}{2} \geqq \frac{\cos(h_n) - 1}{h_n} \geqq 0,$$

daher konvergiert $\frac{\cos(h_n)-1}{h_n}$ gegen $0 = -\sin(0)$. Auch die Cosinusfunktion ist daher in $0$ differenzierbar!

Nun betrachten wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und wenden das Additionstheorem an: Für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben gilt

$$\tfrac{\sin(x+h_n)-\sin(x)}{h_n} = \tfrac{\sin(x)\cos(h_n)+\cos(x)\sin(h_n)-\sin(x)}{h_n} = \sin(x)\tfrac{\cos h_n - 1}{h_n} + \cos(x)\tfrac{\sin h_n - 0}{0}$$

$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin(x)\cos'(0) + \cos(x)\sin'(0) = \cos(x)$, denn $\cos'(0) = 0$ und $\sin'(0) = 1$, wie oben gezeigt.

Also ist der Sinus in jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$.

Da $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist, können wir mit der Kettenregel Proposition 5.6 argumentieren, um die Differenzierbarkeit von $\cos(x)$ zu zeigen, wenn wir noch Lemma 3.4 benutzen. $\square$

**Proposition 5.9** *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar auf* $\mathbb{R}$ *und es gilt* $\exp'(x) = \exp(x)$.

**Beweis :** Das können wir hier nicht beweisen, aber wir können folgende Plausibilitätsbetrachtung anstellen: Definitionsgemäß ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}.$$

Differenzieren wir die Partialsumme $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}\right)' &= \sum_{k=1}^{N} k\frac{x^{k-1}}{k!}. \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Die Behauptung würde also folgen, wenn man Limes und Differentiation vertauschen kann, was man wegen des guten Konvergenzverhaltens der Exponentialfunktion hier ausnahmsweise darf. □

Jetzt wollen wir noch die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen zeigen.

**Satz 5.10** *Es sei* $f \; :]a,b[\to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare und streng monoton wachsende oder fallende Funktion mit* $f(]a,b[) = D$.

*Mit* $f^{-1} : D \to ]a,b[$ *bezeichnen wir die Umkehrfunktion. Ist* $f'(x) \neq 0$, *so ist* $f^{-1}$ *in* $y = f(x)$ *differenzierbar und es gilt* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

**Beweis :** Es sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n \neq 0$, so dass $y + h_n \in D$ ist. Dann ist

$$y + h_n = f(x_n)$$

für ein $x_n = f^{-1}(y + h_n) \in D$. Wir setzen

$$h'_n = x_n - x$$

Da $f^{-1}$ stetig ist (wieso?), konvergiert $x_n$ gegen $x$, also ist $h'_n$ eine Nullfolge.

Da $f'(x) \neq 0$ ist, gilt

$$\left(f'(x)\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{h'_n}{f(x+h'_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y)}{h_n},$$

also folgt in der Tat

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

**Beispiel**

i) Mit $ln = \log_e : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Umkehrfunktion zu $x \mapsto e^x = \exp(x)$, siehe Definition 2.17. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Also gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $\ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

ii) Für alle $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n > 0$, also folgt

$$\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Daraus folgt mit der Kettenregel, dass für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Ableitung der Funktion $f(x) = x^q$ die Funktion

$$f'(x) = qx^{q-1}$$

ist.

# Literatur


[We] A. Werner. *Elementarmathematik I.* Vorlesungsskript WS 2015/16.